Réponses du devoir surveillé de Mathématiques n°8

Exercice 1

1. $\frac{1}{1+\sin x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$.
2. $\left(x = \frac{23}{31}, y = -\frac{10}{31}, z = -\frac{9}{31}\right)$.

Exercice 2 (Approximations rationnelles de e)

1. $I_0 = e - 1$, $I_1 = -1$ et $I_2 = e - 2$.
2. $|I_n| \leqslant \int_0^1 x^n e \, dx = \frac{e}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
3. $I_{n+1} = (n+1)I_n + (-1)^{n+1}e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On a $u_{n+1} = (n+1)u_n$ et $v_{n+1} = (n+1)v_n + (-1)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $u_0 = v_0 = 1$.
5. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ car $v_n = \frac{1}{e}(I_n + u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = e$ car $\frac{u_n}{v_n} = e - \frac{I_n}{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (Étude d'un projecteur)

1. On montre que $P^2 = P$.
2. $\text{Ker } p = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $\text{Ker } (p - Id) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$.
3. p est une projection sur $\text{Ker } (p - Id)$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Exercice 4 (Équation des ondes)

1. Si g est solution de (E') alors $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = C(u)$ d'où $g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)$ avec φ une primitive de C.
2. On montre que $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$ d'où $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v) =$
$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$.
3. $f(x,y) = g(x+y, x-y) = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$.

Exercice 5 (Formule de Leibniz)

1. $\frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$.
2. $\arctan x \underset{0}{=} P_n(x) + o(x^{2n+1})$ avec $P_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.
3. (a) $f_n'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1 - (-x^2) \times (-1)^n x^{2n}}{1 - (-x^2)} = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$.
   (b) $\left|\int_0^1 f_n'(x) \, dx\right| \leqslant \int_0^1 x^{2n+2} \, dx = \frac{1}{2n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) On en déduit que $|f_n(1) - f_n(0)| = \left|\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.